7/12/2018

γραμμοπρ.

A

$$R = Q A \xrightarrow{\text{στηλοπρ.}} \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q A P$$

R: ανηγμ. κλιμ.

Q: γινομ. στοιχ. πινάκων, Αντιστρέψιμος

$r = \text{rank}A$

P: Γινομ. στοιχ. πινάκων. P αντιστρέψιμος

κανονικές βάσεις

$A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ως κανονικές βάσεις

Θεωρούμε ότι ο P είναι πίνακας μετάβασης από κάποια βάση Σ του $\mathbb{R}^n$ στη κανονική.

©NEXT

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{\mathbb{R}^m_{\Sigma'} \xleftarrow{Q} \mathbb{R}^m_{\kappa\alpha\nu} \xleftarrow{A} \mathbb{R}^n_{\kappa\alpha\nu} \longleftarrow \mathbb{R}^n_{\Sigma}}_{\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση.
Έστω ο A πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις.
Υπάρχει βάση Σ του $\mathbb{R}^n$ και Σ' του $\mathbb{R}^m$ ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να είναι ο

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Εδώ } r = \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} T = n - \dim \operatorname{Ker} T$$

Απόδειξη

Έστω $\kappa = \dim \operatorname{Ker} T$ και $\operatorname{Ker} T = \langle u_1, \dots, u_\kappa \rangle$ μια βάση του.
Ορίζουμε βάση του $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιώντας τη βάση του πυρήνα της T.

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1, \dots, v_{n-\kappa}, u_1, \dots, u_\kappa \rangle$$
$$\Sigma = \{ v_1, \dots, v_{n-\kappa}, u_1, \dots, u_\kappa \}$$

Έστω $w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2), \dots, w_{n-\kappa} = T(v_{n-\kappa})$

Τότε $\operatorname{Im} T = \langle T(v_1), \dots, T(v_{n-\kappa}) \rangle = \langle w_1, \dots, w_{n-\kappa} \rangle$

Scanned by CamScanner

Ορίζουμε βάση του $\mathbb{R}^m$ με τα στοιχεία $w_1, \dots, w_{n-k}$

$\mathbb{R}^m = \langle w_1, \dots, w_{n-k}, v_{n-k+1}, \dots, w_m \rangle$

$\Sigma' = \{ w_1, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_m \}$

Ο πίνακας της T από τη Σ στη Σ' θα δίνεται από τους συντελεστές

$$T(v_1) = w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$
$$T(v_2) = 0w_1 + 1w_2 + \dots + 0w_m$$
$$\vdots$$
$$T(v_{n-k}) = 0w_1 + \dots + 1 \cdot w_{n-k} + 0w_{n-k+1} + 0 \cdot w_m$$
$$T(u_1) = \bar{0}$$
$$T(u_k) = \bar{0}$$

$$(T, \Sigma, \Sigma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Im} T = n-k$

$r = \dim \operatorname{Im} T = n-k$

Αν P είναι ο πίνακας μετάβασης από κανονική του $\mathbb{R}^n$ στη Σ και Q ο πίνακας μετάβασης από την Σ' στην κανονική, τότε $A = Q \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} A P^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, dash] & \mathbb{R}^m \arrow[d, dash] \\
\text{κανον} \arrow[r, "A"] \arrow[d, dash, "P"'] & \text{κανον.} \arrow[d, dash, "Q"] \\
\Sigma \arrow[r, dash, "\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] & \Sigma'
\end{tikzcd}$$

Scanned by CamScanner

Θεώρημα

Έστω $T: V^n \to W^m$ γραμμική απεικόνιση.
Έστω A ο πίνακας της T ως προς κάποιες βάσεις $\mathcal{Q}_1$ και $\mathcal{Q}_2$. Υπάρχει βάση Σ του V^n και Σ' του W^m ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις ο $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Εδώ $r = \text{rank} A = \dim \text{Im} T = n - \dim \text{Ker} T$
Αν λοιπόν P είναι ο πίνακας μετάβασης από την $\mathcal{Q}_1$ στη Σ και από Q από την Σ' στην $\mathcal{Q}_2$

$$(T, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = Q \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (T, \Sigma, \Sigma')$$

π.χ. Δίνεται ο $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$(x, y, z) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$$

Να βρεθούν οι βάσεις ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να είναι ο: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker} T = \{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

$$(x-y, x+y+z, 2x+z) = (0, 0, 0)$$

$x = y$

$2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y \qquad (x, y, z) = (y, y, -2y)$

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (1,1,-2) \rangle$

$\downarrow$

$T(\mathbb{R}^3) = \langle T(1,0,0), T(0,1,0) \rangle = \langle (1,1,2), (-1,1,0) \rangle$

$\downarrow$

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,2), (-1,1,0), (0,0,1) \rangle$

Σ'

$T(1,0,0) = 1(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(0,1,0) = 0(1,1,2) + 1(-1,1,0) + 1(-1,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(1,1,-2) = (0,0,0)$

$$(T,\Sigma,\Sigma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (T, \text{uav}, \text{uav}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner