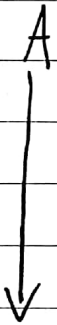


r

7/12/2018

σπασμένη



κανονικές
βάσεις

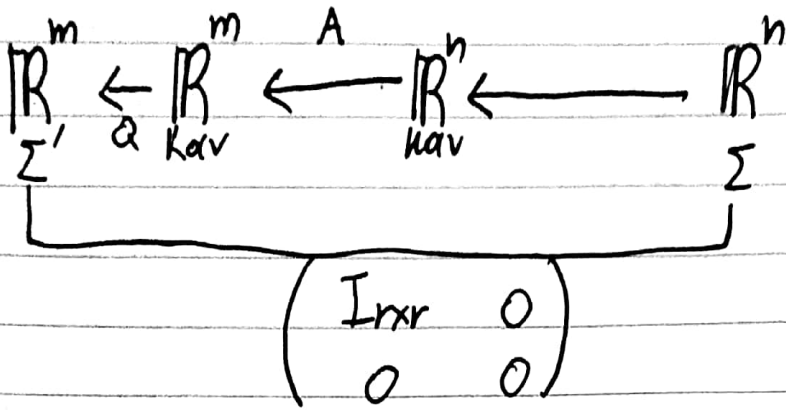
$$A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

ως κανονικές
βάσεις

$$R = Q A \xrightarrow{\text{σύνολο}} \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q A P$$

$r = \text{rang}(A)$
 Αρτιστρέφτος
 Παντοσφι ύψος

Θεωρούμε ότι ο P είναι πίνακας μετάβασης από κάποια βάση Σ του \mathbb{R}^n στη κανονική.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση.
 Έστω ο A πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις.
 Υπάρχει βάση Σ του \mathbb{R}^n και Σ' του \mathbb{R}^m ώστε ο
 πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να είναι ο

$$\begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Εδώ } r = \text{rang} A = \dim \text{Im} T = \\
 = n - \dim \text{Ker} T$$

Απόδειξη

Έστω $k = \dim \text{Ker} T$ και $\text{Ker} T = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ για
 βάση του.
 Ορίσουμε βάση του \mathbb{R}^n χρησιμοποιώντας τη βάση
 του $\text{Ker} T$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^n &= \langle v_1, \dots, v_{n-k}, u_1, \dots, u_k \rangle \\
 \Sigma &= \{ v_1, \dots, v_{n-k}, u_1, \dots, u_k \}
 \end{aligned}$$

$$\text{Έστω } w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2), \dots, w_{n-k} = T(v_{n-k})$$

$$\text{Τότε } \text{Im} T = \langle T(v_1), \dots, T(v_{n-k}) \rangle = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle$$

Ορίσουμε βάση του \mathbb{R}^m με τα στοιχεία w_1, \dots, w_m

$$\mathbb{R}^m = \langle w_1, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_m \rangle$$

$$\Sigma' = \{w_1, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_m\}$$

Ο πίνακας της T από τον Σ στον Σ' θα δίνεται από τους συντελεστές

$$T(v_1) = w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_m$$

$$T(v_2) = 0w_1 + 1w_2 + \dots + 0w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_{n-k}) = 0w_1 + \dots + 1w_{n-k} + 0w_{n-k+1} + \dots + 0w_m$$

$$T(u_1) = \bar{0}$$

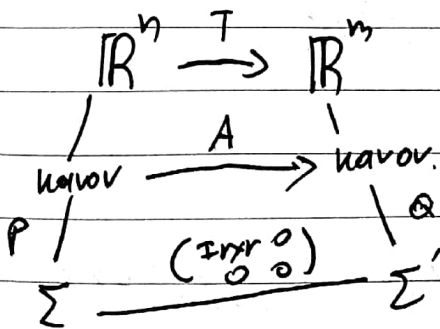
$$T(u_2) = \bar{0}$$

$$(T, \Sigma, \Sigma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im} T = n-k$

$r = \dim \text{Im} T = n-k$

Αν P είναι ο πίνακας μετάβασης από κανονική του \mathbb{R}^n στον Σ και Q ο πίνακας μετάβασης από τον Σ' στην κανονική, τότε $A = Q \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} A P^{-1}$



Θεώρημα

Έστω $T: V^n \rightarrow W^m$ γραμμική απεικόνιση.
Έστω A ο πίνακας της T ως προς κάποιες βάσεις \mathcal{O}_1 και \mathcal{O}_2 . Υπάρχει βάση Σ' του V^n και Σ' του W^m ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις ο $\begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Εδώ $r = \text{rank } A = \dim \text{Im } T = n - \dim \text{Ker } T$
Αν λοιπόν P είναι ο πίνακας μετάβασης από την \mathcal{O}_1 στην Σ' και από \mathcal{Q} από την Σ' στην \mathcal{O}_2
 $(T, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$

$$\begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (T, \Sigma, \Sigma')$$

π.χ. Δίνεται ο $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με νόμο

$$(x, y, z) = (x - y, x + y + z, 2x + z)$$

Να βρεθούν οι βάσεις ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να είναι ο: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker } T = \{ (y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

$$(x - y, x + y + z, 2x + z) = (0, 0, 0)$$

$$x = y$$

$$2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y \quad (x, y, z) = (y, y, -2y)$$

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -2) \rangle$$

$$T(\mathbb{R}^3) = \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0) \rangle = \langle (1, 1, 2), (-1, 1, 0) \rangle$$

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 2), (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle_{\Sigma'}$$

$$T(1, 0, 0) = 1(1, 1, 2) + 0(-1, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = 0(1, 1, 2) + 1(-1, 1, 0) + 1(-1, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$T(1, 1, -2) = (0, 0, 0)$$

$$(T, \Sigma, \Sigma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (T, u_{av}, u_{av}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$